

Hong Kong Mathematics Olympiad (2016/17)
Heat Event (Group)
香港數學競賽 (2016/17)
初賽項目(團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

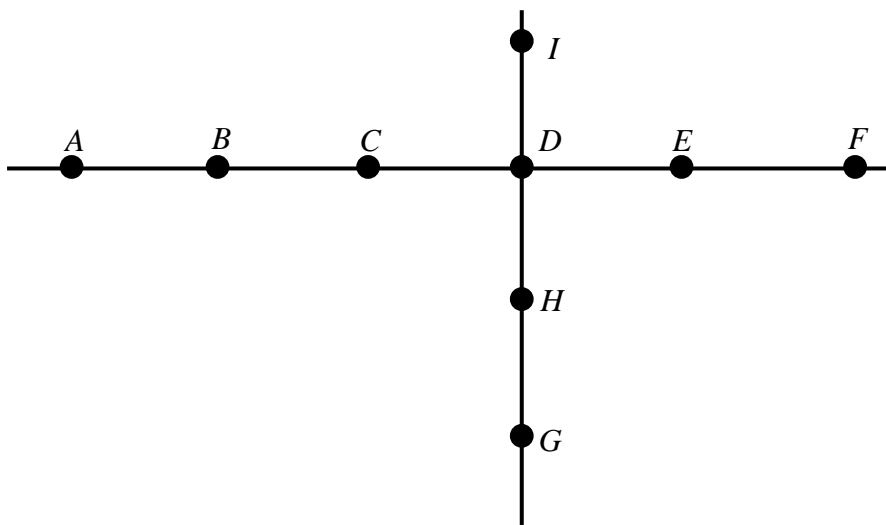
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

1. 設 $\triangle ABC$ 為一個等腰直角三角形，頂點 A 及 B 的坐標分別為 $(-2, 0)$ 及 $(18, 0)$ ，且 C 的坐標是正數。當 $\triangle ABC$ 的面積為最小時，求 C 的坐標。

Suppose that $\triangle ABC$ is an isosceles right-angled triangle with the coordinates of the vertices A and B as $(-2, 0)$ and $(18, 0)$, respectively, and the coordinates of C having positive values. Determine the coordinate of C when the area of $\triangle ABC$ attains its minimum.

2. 如圖一所示，點 A, B, C, D, E 及 F 均在一直線上，點 G, H, D 及 I 在另一直線上。揀選三點，可形成多少個三角形？

As shown in Figure 1, points A, B, C, D, E and F lie on the same straight line, and points G, H, D , and I lie on another straight line. How many triangles can be made by connecting any three points?

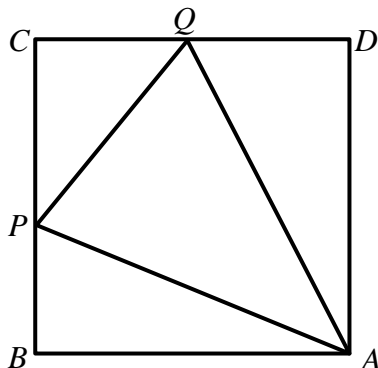


圖一

Figure 1

3. 如圖二所示， P 、 Q 分別是正方形 $ABCD$ 的邊 BC 及 CD 上的點。已知 $\triangle PCQ$ 的周界的長等於正方形 $ABCD$ 的周界的長的 $\frac{1}{2}$ ，求 $\angle PAQ$ 。

As shown in Figure 2, P , Q are points on the sides BC and CD of a square $ABCD$. Given that the perimeter of $\triangle PCQ$ is $\frac{1}{2}$ of that of the square $ABCD$, find $\angle PAQ$.

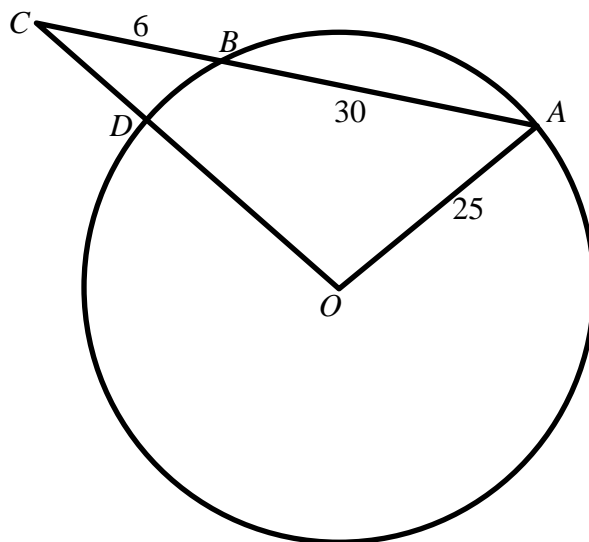


圖二

Figure 2

4. 在圖三中， O 是圓心。弦 AB 及半徑 OD 的延線相交於 C 。已知 $OA = 25$ 、 $AB = 30$ 及 $BC = 6$ 。求 CD 的長。

In Figure 3, O is the centre of the circle. Chord AB and radius OD are produced to meet at C . Given that $OA = 25$, $AB = 30$ and $BC = 6$, find the length of CD .



圖三

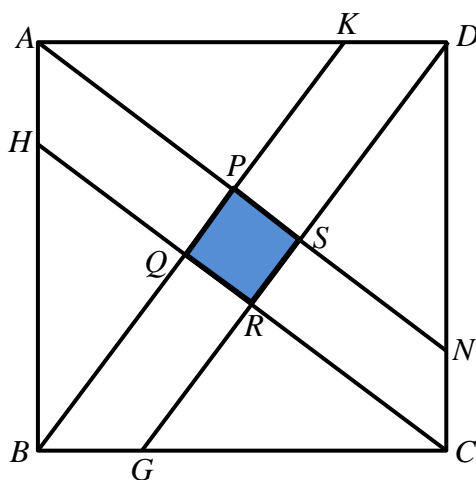
Figure 3

5. 設 Q 為所有能滿足不等式 $\frac{9p^2}{(\sqrt{3p+1}-1)^2} < 3p+10$ 的整數 p 之和，求 Q 的值。

Let Q be the sum of all integers p satisfying the inequality $\frac{9p^2}{(\sqrt{3p+1}-1)^2} < 3p+10$, find the value of Q .

6. 在圖四中，正方形 $ABCD$ 的邊長為 20。已知 $DK : KA = AH : HB = 1 : 3$ 及 $BK \parallel GD$ ， $HC \parallel AN$ ，求陰影部分 $PQRS$ 的面積。

In Figure 4, square $ABCD$ has sides of length 20. Given that $DK : KA = AH : HB = 1 : 3$ and $BK \parallel GD, HC \parallel AN$, find the area of the shaded region $PQRS$.



圖四

Figure 4

7. 已知對於實數 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2017}$,

$$\sqrt{x_1-1} + \sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_3-1} + \dots + \sqrt{x_{2017}-1} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2017}).$$

求 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{2017}$ 的值。

It is given that for real numbers $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2017}$,

$$\sqrt{x_1-1} + \sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_3-1} + \dots + \sqrt{x_{2017}-1} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2017}).$$

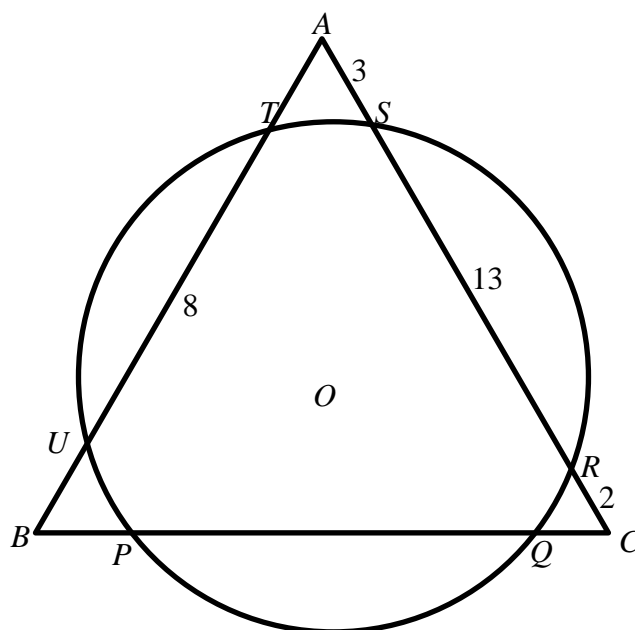
Find the value of $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{2017}$.

8. 設正整數 T 能滿足條件： T 的數字的積 $= T^2 - 11T - 23$ 。求該等正整數之和， S ，的值。

Let positive integers, T , satisfy the condition: the product of the digits of $T = T^2 - 11T - 23$. Find the sum, S , of all such positive integers.

9. 在圖五中， ABC 是一個等邊三角形且與一圓相交於六點， P 、 Q 、 R 、 S 、 T 及 U 。若 $AS = 3$ ， $SR = 13$ ， $RC = 2$ 及 $UT = 8$ ，求 $BP - QC$ 的值。

In Figure 5, ABC is an equilateral triangle intersecting the circle at six points P , Q , R , S , T and U . If $AS = 3$, $SR = 13$, $RC = 2$ and $UT = 8$, find the value of $BP - QC$.



圖五

Figure 5

10. 已知方程 $a^2x^2 - (4a - 3a^2)x + 2a^2 - a - 21 = 0$ (其中 $a > 0$) 有最少一個整數根，求所有 a 的可能整數值之和。

It is given that the equation $a^2x^2 - (4a - 3a^2)x + 2a^2 - a - 21 = 0$ (where $a > 0$) has at least one integer root. Find the sum of all possible integral values of a .

完
END